Adı Soyadı:
Numarası:

İDEAL TEORİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) M bir R-Modül K, L, N, M'nin alt R-Modülleri ve $K \subseteq N$ olsun. Bu durumda

$$K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$$

olduğunu gösteriniz.

2) a) R bir Boole halkası ve I, R'nin has ideali olsun. Her $a \in R$ için $a \in I$ veya $1 - a \in I$ ise I ideali maksimal idealdir. Gösteriniz.

b) R Boole halkası cisim ise $R \cong \mathbb{Z}_2$ olduğunu gösteriniz.

3) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bu durumda R'nin her öz ideali R'nin bir maksimal ideali tarafından kapsanır. İspatlayınız.

4) Jacopson Radikalini tarif ediniz. Ayrıca $\mathbb{Z}_{45}$ halkasının Jacopson radikalini hesaplayınız.

5) Birimli ve değişmeli bir R halkasının her ideali asalsa R cisimdir. Gösteriniz.

1-) $K+(L \cap N) \subseteq K+L$ ve $K \subseteq N$ old. $K+(L\cap N) \subseteq K+N \subseteq N$ olup $K+(L\cap N) \subseteq (K+L)\cap N$ dir. (1)

Tersine $x \in (K+L) \cap N \Rightarrow x \in N$ old. dan ve $x = y+z$ $y \in K$, $z \in L$, $K \subseteq N$ old. $z = x - y \in L \cap N \Rightarrow$ $x = y + z \in K + (L \cap N)$ $^{(2)}$ olup $K + (L\cap N) = (K+L)\cap N$ bulunur

2-) a) $I \subset J$ ve $a \in J \setminus I$ alalım. $1_R - a \in I \subset J$ $\Rightarrow 1_R = (1-a) + a \in J$ olup $J = R$ bulunur. O halde I maksimal idealdir.

b) R cisim olsun. Her $0 \neq a \in R$ için $a = a.1_R = a(a\,a^{-1}) = a^2.a^{-1} = a.a^{-1} = 1_R$ olup $R = \{0_R, 1_R\}$ Dolayısıyla $R \cong \mathbb{Z}_2$ bulunur.

3) I, R'nin has (öz) ideali olsun.

$A = \{ J \mid I \subseteq J$ ve J, R'nin öz ideali $\}$

$I \in A$ old. $A \neq \emptyset$ kapsama bağıntısına göre A bir KSK dır. Şimdi A kümesinin zincirinin A içinde bir üst sınıra sahip old. gösterelim.

$C = \{ J_\alpha \mid \alpha \in K \}$ A'da bir zincir olsun.

$\forall \alpha \in K$, $I \subseteq J_\alpha$, $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$ dır.

$a, b \in \bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha \Rightarrow a \in J_\alpha$, $b \in J_\beta$ o.sek. $\alpha, \beta \in K$ var

C zincir old.dan ya $J_\alpha \subseteq J_\beta$ ya da $J_\beta \subseteq J_\alpha$

$J_\alpha \subseteq J_\beta$ olsun. $a, b \in J_\beta$, $a - b \in J_\beta$

$\Rightarrow a - b \in J_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$, $ra \in J_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$ $(r \in R)$

$\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha$ ideal $J_\alpha \neq R$ old. $(\forall \alpha \in K)$ $\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha \neq R$ dir.

$\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha \in A$ olup C'nin üst sınırıdır.

A Zorn lemmaya göre maksimal elemanı sahip bunu M ile gösterelim.

$M \subset J \subset R$ olacak şekilde J idealini alalım.

$J \in A$ ise M'nin seçimi ile çelişir. O halde M maksimal ideal olup ispat biter.

4) R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine Jacopson radikali denir.

$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{45}$, $f(n) = \overline{n}$ tanımlayalım.

$\operatorname{Çek} f = 45\mathbb{Z}$ old.dan Çek f'i içeren idealler

$\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 9\mathbb{Z}, 15\mathbb{Z}$ ve $45\mathbb{Z}$ dir.

$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{45}$

$f(3\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{36}, \overline{39}, \overline{42}\} = J$

$f(5\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}\} = I$

$f(9\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{27}, \overline{36}\}$

$f(15\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{15}, \overline{30}\}$

$f(45\mathbb{Z}) = \{\overline{0}\}$

$J(\mathbb{Z}_{45}) = J \cap I = \{\overline{0}, \overline{15}, \overline{30}\}$ bulunur

5) (0) bir asal ideal olduğundan

$R/_{(0)} = R$ olup R T.B dir.

$0 \neq a \in R$ ise $(a)(a) = (a^2)$ olur. (a^2) asal ideal olduğundan $(a) \subseteq (a^2)$, $(a^2) \subseteq (a)$ olup $(a) = (a^2)$ bulunur.

$a \in (a^2) \Rightarrow a = a^2 x \Rightarrow a - a^2 x = 0_R$

$\Rightarrow a(1 - ax) = 0_R$ $a \neq 0_R \Rightarrow 1 - ax = 0_R$

$\Rightarrow ax = 1_R$ olup a terslenebilir. Yani R cisimdir.